

## OPTIMAL PERTURBATION FOR MIXED CONVECTION HEAT TRANSFER IN RECTANGULAR CHANNEL

Rachid SEHAQUI<sup>1</sup>

*Faculté des Sciences Ain Chock UFR de mécanique BP 5366 Maarif, Casablanca, Maroc Fax: (212)(22) 23-06-74 Tel : (212)(22) 23-06-80E-mail: [sehaqui@hotmail.com](mailto:sehaqui@hotmail.com)*

**Abstract:** We studied the growth velocity perturbation at the entrance of a rectangular channel for mixed convection heat transfer. The flow is bidimensionnel and the fluid is newtonian, incompressible obeying to Boussinesq approximations. Particular forms of entry velocity profile allowing a better heat transfer inside a channel for a given regime of flow is determined. Optimal control method based on adjoint equations is used to obtain optimality condition.

**Keywords:** *adjoint equations, convection mixte, optimal control, optimal perturbation*

### 1. Abridged English version

The study of the mixed convection in a horizontal channel, uniformly or partially heated, plays a significant role in various technological processes, such as, the chemical vapour deposition of solid layers, cooling of microelectronic equipment's, enhancing thermal efficiency of compact heat exchangers or the calculation of the solar collector energy. Physical phenomena that appear in mixed convection, in a horizontal channel are complex and depend on the Reynolds number  $Re$ , the Rayleigh number  $Ra$ , the Prandtl number  $Pr$ , and the geometry of the channel characterised by the aspect ratio  $B = l/h$ . Previous investigations have essentially focused on the classification of the different regimes of flow following the values of dimensionless numbers [1] – [6].

In the last decade, increased attention has been devoted to the development of techniques capable of enhancing our ability to control the unsteady flow in a wide variety of configurations such as engine inlets and nozzles, combustors, automobiles, aircraft, and marine vehicles. Gad-el-Hak [7] and Gad-el-Hak and Bushnell [8] provide an excellent introduction and overview of various control methodologies. In practice, for a given controlling input, we choose an objective functional to be maximised, and by a formal maximisation procedure we obtain a system of

differential equations (state equations and adjoint equations) and condition of optimality, whose solution gives the optimal control. The results can then be applied to develop mechanisms for control. This approach used in particular by Cathalifaud and Luchini [9] they attacked the problem of controlling linear optimal perturbations in spatially developing boundary layer on flat and concave plates by considering the wall receptivity. The optimal perturbations are the result of recent development in the field of hydrodynamic stability. For a given definition of disturbance energy, we can calculate the input disturbance of the boundary layer that maximises the output disturbance energy, i.e the optimal perturbation. For the spatial algebraic growth of steady disturbances leading to bypass transition in the boundary layer over a flat surface, this 'optimal' input disturbance was calculated by Andersson [10].

Many flows exhibit the following scenario: the flow starts out in laminar state which is instable; then a linear instability develops, and grows up to the point where non-linear interactions finally lead to turbulence. In many applications, it might be very interesting to delay this transition towards turbulence and thus to maintain the flow laminar. The first objective, within this framework, of a

system of flow control will be to control heat transfer by entry velocity profile.

This paper is organised as follows. In section 3, the method of optimal control is presented. In section 4 the method of adjoint equations and the optimal control. In section 5, the results are presented and discussed

## 2. Introduction

Le transfert thermique par convection mixte à l'intérieur d'un canal rectangulaire présente un intérêt considérable en vue d'applications technologiques telles que : dépôt chimique des couches minces, refroidissement des pièces électroniques, augmentation de l'efficacité d'un échangeur de chaleur, calcul de l'énergie d'un capteur solaire et plusieurs autres domaines des sciences de l'ingénieur. Les phénomènes qui apparaissent dans le cas de la convection mixte sont complexes et dépendent de plusieurs paramètres : le nombre de Reynolds  $Re$ , le nombre de Rayleigh  $Ra$ , le nombre de Prandtl  $Pr$  et du rapport de forme  $B = 1 / h$ . Les conditions aux limites tant celles fixant le profil de vitesse à l'entrée du tube que celles relatives à la géométrie de la conduite ont une influence sur le transfert thermique. De nombreux travaux ont cherché à corréler le transfert thermique aux conditions aux limites thermiques imposées aux parois du tube ou à la forme géométrique de la conduite [1]-[6]. Cette dernière décennie, une attention accrue a été consacrée au développement des techniques capables de contrôler la stabilité des écoulement dans plusieurs configurations. Gad-el-Hak [7] et Gad-el-Hak and Bushnell [8] fournissent une excellente introduction aux diverses méthodes de contrôle. En pratique pour contrôler les écoulements d'entrée, on choisit une fonctionnelle objective à maximiser, et par un procédé formel de maximisation nous obtenons un système d'équations différentielles (des équations d'état, des équations adjointes) et la condition d'optimalité, dont la résolution permet d'obtenir la commande optimal de contrôle. Cette approche a été en particulier employée par Cathalifaud et Luchini [9] ont traité le problème de contrôle des perturbations optimales linéaires dans le cas de la couche limite pour une plaque plane et concave. Les développements récents dans le domaine de la stabilité hydrodynamique sont à l'origine de l'intérêt accordé aux perturbations optimales. Pour une définition de l'énergie de perturbation donnée

on peut calculer la perturbation à l'entrée de la couche limite qui permet de maximiser l'énergie de perturbation à la sortie, c'est à dire la perturbation optimale. Andersson [10] a étudié la croissance des perturbations régulières permettant d'éviter la transition, dans le cas d'une couche limite qui se développe au dessus d'une surface plane.

On rappelle dans la section 3 la méthode du contrôle optimum. Dans la section 4 la technique des équations adjointes. Dans la section 5 on expose les résultats obtenus.

## 3. Méthode du contrôle optimum

L'idée du contrôle optimum est d'optimiser la fonctionnelle représentant la quantité physique que nous cherchons à contrôler. Nous allons décrire dans ce paragraphe la méthode classique d'optimisation basée sur les multiplicateurs de Lagrange, Gunsburger [11]. Soit  $q$  la variable d'état et soit  $r$  la variable de contrôle ( que nous voulons contrôler ). On suppose que  $q$  et  $r$  vérifient le problème suivant:

$$\vec{F}(q, r) = 0 \quad (1)$$

Ou  $\vec{F} = (F_q, F_r)$ . L'équation (1) est appelée équation de contrainte du problème direct ou système d'état.  $F_q$  est la contrainte relative à la variable d'état  $q$  et  $F_r$  celle relative à la variable de contrôle  $r$ . On définit la fonctionnelle gain  $\Gamma(q, r)$  qui peut représenter par exemple une distribution d'énergie, de température ou de frottements visqueux...etc. Le problème qui consiste en la recherche de  $q$  et  $r$  vérifiant les contraintes (1) et dont la fonctionnelle  $\Gamma(q, r)$  est minimale est appelé « problème de minimisation ». L'approche générale de la minimisation est de former le vecteur multiplicateurs de Lagrange. La fonctionnelle Lagrangienne est ainsi définie par :

$$L(q, r, \vec{\xi}) = \Gamma(q, r) - \langle \vec{F}(q, r), \vec{\xi} \rangle \quad (2)$$

Ou  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  représente le produit scalaire entre les variables d'état  $(q, r)$  et les variables adjointes

$(\xi_q, \xi_r)$ . Le problème d'optimisation consiste à la détermination de  $q, r, \bar{\xi}$ , pour  $L(q, r, \bar{\xi})$  stationnaire et vérifiant le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow \text{conditions d'optimalité} \\ \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \Rightarrow \text{équations adjointes} \\ \frac{\partial L}{\partial \xi_q} = \frac{\partial L}{\partial \xi_r} = 0 \Rightarrow \text{équations des contraintes} \end{cases} \quad (3)$$

#### 4. Méthode des équations adjointes

##### 4. 1. Problème direct

Dans le système de coordonnées cartésiennes  $(x^*, y^*)$ , on considère l'écoulement plan d'un fluide newtonien incompressible de viscosité cinématique  $\nu$ , dans un canal rectangulaire, de longueur  $l$  et de hauteur  $h$ . La température du plan inférieur ( $y^* = 0$ ) est imposée le plan supérieur ( $y^* = h$ ) est adiabatique. On introduit les quantités adimensionnelles suivantes :

$$x = \frac{x^*}{l}, y = \frac{y^*}{h}, U = \frac{U^*}{U_0}, V = \frac{V^*}{U_0}, p = \frac{p^*}{\rho U_0^2}, T = \frac{T^* - T_f}{\Delta T}$$

où  $U, V, p, T$  désignent respectivement la vitesse longitudinale, la vitesse transversale, la pression et le champ de température adimensionnels et  $\Delta T, U_0$ , et  $\rho$  une différence de température de référence, la vitesse moyenne, la masse volumique. Les équations de Navier-Stokes adimensionnelles s'écrivent sous la forme :

$$\partial_x U + \partial_y V = 0 \quad (4)$$

$$U \partial_x U + V \partial_y U = -\partial_x P + \text{Re}^{-1} \partial_{yy} U \quad (5)$$

$$U \partial_x V + V \partial_y V = -\partial_y P + \frac{1}{\text{Re}} \partial_{yy} U + \frac{Ra}{\text{Pr Re}^2} T$$

$$U \partial_x T + V \partial_y T = -\text{Pe}^{-1} \partial_{yy} T \quad (6) (7)$$

où  $\text{Re} = \frac{U_0 h}{\nu}$  est le nombre Reynolds,

$\text{Ra} = \frac{g \beta \Delta T h^3}{\nu \alpha}$  le nombre de Rayleigh,  $\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}$

le nombre de Prandtl,  $\alpha$  la diffusivité thermique,  $g$  l'accélération de la pesanteur,  $\beta$  le coefficient d'expansion thermique et  $\text{Pe} = \text{Re Pr}$  le nombre de Peclet. Cet écoulement principal fait l'objet d'une perturbation  $(u, v, p, \theta)$  à l'entrée (e), et on étudie l'influence de cette perturbation à la sortie (s). On cherche à maximiser un gain  $G$  défini à partir de l'énergie de perturbation. On appelle perturbation optimale la donnée des fonctions  $u(x_e, y)$ ,  $v(x_e, y)$  qui conduisent au gain maximum. Les équations linéarisées pour la perturbation s'écrivent :

$$\partial_x u + \partial_y v = 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \partial_x (Uu) + V \partial_y u + v \partial_y U &= -\partial_x p + \text{Re}^{-1} \partial_{yy} u \\ U \partial_x v + u \partial_x V + \partial_y (Vv) &= -\partial_y p + \frac{1}{\text{Re}} \partial_{yy} v + \frac{Ra}{\text{Pr Re}^2} \theta \\ U \partial_x \theta + u \partial_y T + v \partial_y T + U \partial_x \theta &= -\text{Pe}^{-1} \partial_{yy} \theta \end{aligned} \quad (9)$$

A ce système on associe les conditions aux limites suivantes :  $u(x, 0) = v(x, 0) = \theta(x, 0) = (\partial_x \theta)_{y=1} = 0$ ,  $u(0, y) = u_e(y)$ ,  $v(0, y) = v_e(y)$ ,  $\theta(0, y) = \theta_e(y)$ .

##### 4. 2. Problème adjoint

La majoration du gain  $G(u, v, p, \theta)$  moyennant les équations (8)-(11) conduit à l'étude de la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} L(a, b, c, d, u, v, p, \theta) &= G(u, v, p, \theta) - \\ &\left\{ \int_0^1 \left[ \int_{x_e}^{x_f} d(x, y) \left[ U \partial_x v + u \partial_x V + \partial_y (Vv) + \partial_y p - \text{Re}^{-1} \partial_{yy} v - \frac{Ra}{\text{Pr Re}^2} \text{Pr}^{-1} \theta \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + d(x, y) \left[ U \partial_x \theta + u \partial_y T + v \partial_y T + V \partial_y \theta - \text{Pe}^{-1} \partial_{yy} \theta \right] \right] dx dy \right\} \end{aligned}$$

Dans laquelle  $a, b, c$  et  $d$  sont les multiplicateurs de Lagrange. La recherche de la solution optimale revient à écrire  $\overrightarrow{\text{Grad}}_{a, b, c, d, u, v, p, \theta} (L) = \vec{0}$ . Après des calculs basés sur des intégrations par parties, on peut écrire le problème adjoint en introduisant

le groupement  $A = a+bU$ . Les variables adjointes du problème sont :  $A$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$ .

$$\partial_x b + \partial_y c = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \partial_x A - b \partial_x U + \partial_y (bV) + \text{Re}^{-1} \partial_{yy} b - c \partial_x V - d \partial_x T &= 0 \\ \partial_y A - 2b \partial_y U - U \partial_y b + \partial_x (cU) + V \partial_y c + \text{Re}^{-1} \partial_{yy} c - d \partial_y T &= 0 \end{aligned}$$

$$\partial_x (dU) + \partial_y (dV) + \frac{1}{Pe} \partial_{yy} d + \frac{Ra}{\text{Pr Re}^2} c = 0$$

Aux équations (13)-(16) on associe les conditions aux limites suivantes, issues du système (3) :

$$\begin{aligned} h(x,y=0) = h(x,y=1) = d(x,y=0) = d(x,y=1) = d(x,y=0) = d(x,y=1) = 0 \\ h(x=0,y) = h(x=A,y) = d(x=A,y) = d(x=0,y) = d(x=0,y) = d(x=A,y) = 0 \end{aligned}$$

### 4. 3. Méthode de resolution

On superpose à l'écoulement de base une perturbation, on associe à cette perturbation une fonctionnelle énergie appelée gain que l'on cherche à maximiser. Pour se faire on utilise une formulation variationnelle permettant de mettre en évidence le problème adjoint assorti des conditions aux limites adéquates. Le problème direct de la convection mixte bidimensionnelle est de nature parabolique et on le résout de l'entrée à la sortie dans le sens de l'écoulement, c'est à dire des  $x$  croissant. Le problème adjoint consiste en un système d'équations paraboliques dans le sens rétrograde résolu de la sortie à l'entrée ; les variables adjointes sont appelées variables de sensibilité. La recherche de la perturbation optimale, se fait par itérations successives en initialisant le processus par une perturbation  $u_e^0(y)$  donnée arbitrairement. A la  $n$ ème itération, le problème directe sera donné par :

$$\partial_x u^n + \partial_y v^n = 0 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \partial_x (Uu^n) + V \partial_y u^n + v^n \partial_y U &= -\partial_x p^n + \text{Re}^{-1} \partial_{yy} u^n \\ U \partial_x v^n + u^n \partial_x V + \partial_y (v^n) &= -\partial_y p^n + \frac{1}{\text{Re}} \partial_{yy} v^n + \frac{Ra}{\text{Pr Re}^2} \theta^n \\ U \partial_x \theta^n + u^n \partial_y T + v^n \partial_y T + U \partial_x \theta^n &= -Pe^{-1} \partial_{yy} \theta^n \end{aligned}$$

Avec les conditions aux limites :  $u^n(x,0) = v^n(x,0) = \theta^n(x,0) = (\partial_x \theta^n)_{y=1} = 0$ , dans le cas ou le gain  $G$  est définit comme suit :

$$G = \frac{\int_0^1 u(x_s, y)^2 dy}{\int_0^1 u(x_e, y)^2 dy} \quad (12)$$

et la condition d'entrée est donnée par

$$u_e^n(y) = A_e^{n-1}(y) \frac{\left\{ \int_0^1 [u_e^{n-1}(y)]^2 dy \right\}^2}{2 \int_0^1 [u_s^{n-1}(y)]^2 dy} \quad (13)$$

La résolution du problème direct permet à chaque itération de déterminer  $u_s^n(y)$ , ce qui donne la condition d'entrée pour le problème adjoint :

$$A_s^n(y) = \frac{2u_s^n(y)}{\int_0^1 [u_e^n(y)]^2 dy} \quad (14)$$

Le problème adjoint à l'itération (n) s'écrit :

$$\partial_x b^n + \partial_y c^n = 0 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \partial_x A^n - b^n \partial_x U + \partial_y (b^n V) + \text{Re}^{-1} \partial_{yy} b^n - c^n \partial_x V - d^n \partial_x T &= 0 \\ \partial_y A^n - 2b^n \partial_y U - U \partial_y b^n + \partial_x (c^n U) + V \partial_y c^n + \text{Re}^{-1} \partial_{yy} c^n - d^n \partial_y T &= 0 \\ \partial_x (d^n U) + \partial_y (d^n V) + \frac{1}{Pe} \partial_{yy} d^n + \frac{Ra}{\text{Pr Re}^2} c^n &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Et la condition d'entrée écrite ci dessus. Une fois le problème adjoint résolu à l'itération (n) la connaissance de la fonction  $A^n$  calculée à l'entrée permet de passer à l'itération suivante :

$$u_e^{n+1}(y) = A_e^n(y) \frac{\left\{ \int_0^1 [u_e^n(y)]^2 dy \right\}^2}{2 \int_0^1 [u_s^n(y)]^2 dy}$$

## 6. Résultats

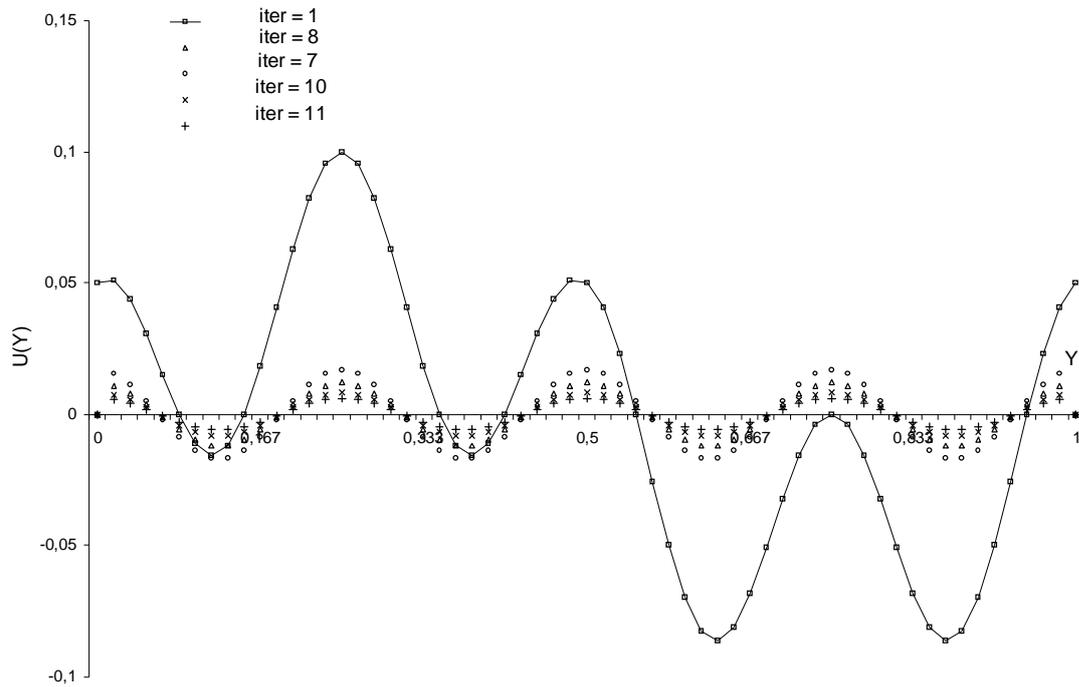


Figure 1. Profil de vitesse optimum obtenu après plusieurs itérations

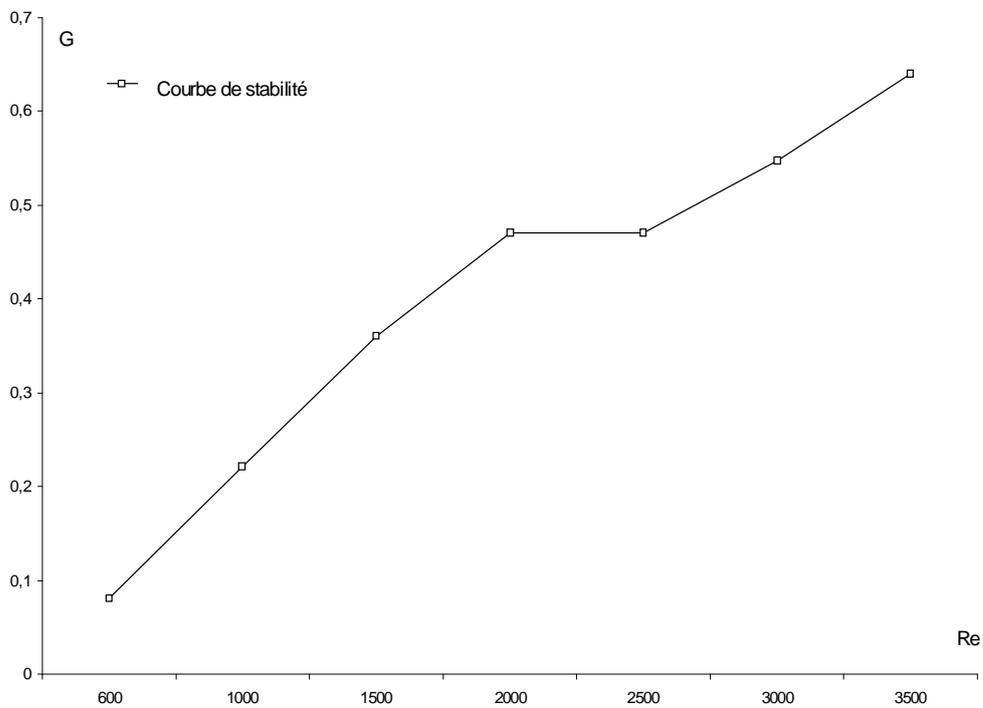


Figure 2: Variation du gain en fonction du nombre de Reynolds

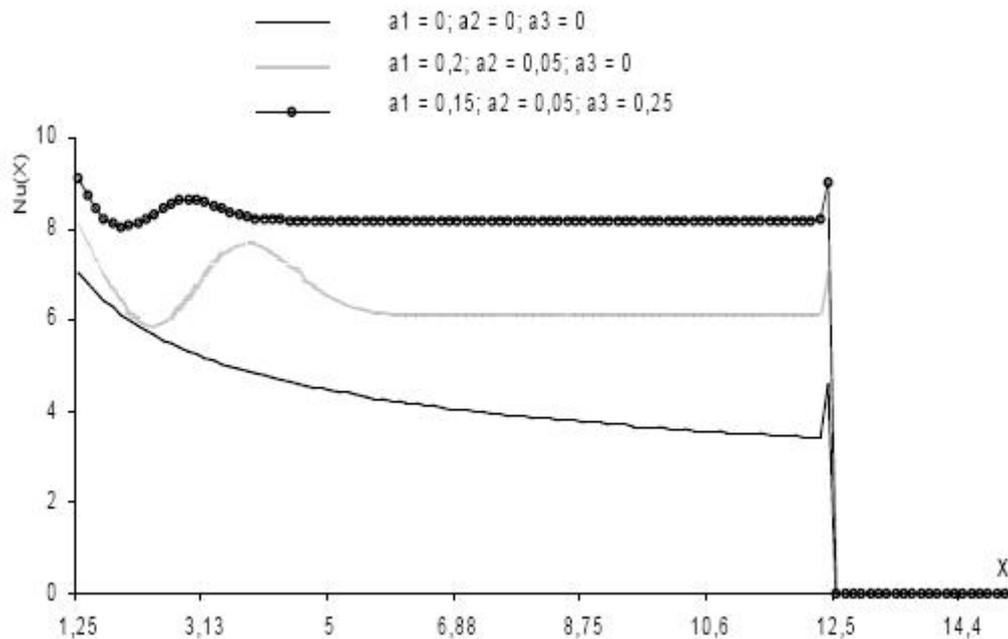


Figure 3: Variation du nombre de Nusselt local(a):profil de vitesse non perturbée,(b):profil de vitesse optimum

### Références bibliographiques

- [1] J. N. N. Quaresma, R. M. Cotta, Exact solutions for thermally developing tube flow with variable wall heat flux, *International Communications in Heat and Mass Transfer* 41 (1994) 729-742.
- [2] Dae-Young Lee, Sang-Jin Park, Sung Tack Ro, Heat transfer by oscillating flow in circular pipe with a sinusoidal wall temperature distribution, *Int. J. Heat Mass Transfer* 38 (1995) 2529-2537.
- [3] P. Stefano, An analytical approach to fully developed heating of laminar flows in circular pipes *International Communications in Heat and Mass Transfer* 22 (1995) 815-824.
- [4] Tatsuo Nishimura, Naoya Kojima, Mass transfer enhancement in symmetric sinusoidal wavy-walled channel for pulsatile flow, *Int. J. Heat Mass Transfer*. 38 (1995) 1719-1731.
- [5] G. Russ, H. Beer, Heat transfer and flow field in a pipe with sinusoidal wavy surface - I numerical investigation, *Int. J. Heat Mass Transfer* 40 (1997) 1061-1070.
- [6] G. Russ, H. Beer, Heat transfer and flow field in a pipe with sinusoidal wavy surface-II Experimental investigation, *int. J. Heat Mass Transfer* 40 (1997) 1071-1081.
- [7] Gad-el-Hak, M., Flow control, *Applied Mechanics Review*, Vol 42, 10, (1989), 261-293.
- [8] Gad-el-Hak, M., Bushnell, D. M., Separation control: Review, *Journal of Fluid Engineering*, Vol 113, 1, (1991), 5-30.
- [9] P. Cathalifaud, P. Luchini, Algebraic growth in boundary: optimal control by blowing and suction at the wall. *Eur. J. Mech. B- Fluids* 19 (2000) 469-490.
- [10] P. Andersson, M. Berggren, D. Henningson, Optimal disturbances in boundary layer, *Physics of fluids* 11 (1999) 134-150.
- [11] Gunzburger M., Inverse design and optimization methods : Lagrange multiplier techniques, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series (1997).